

# Einer »den irdischen Angelegenheiten möglichst fernliegenden Wissenschaft« gewidmet

Der Mathematiker Carl Ludwig Siegel in Frankfurt

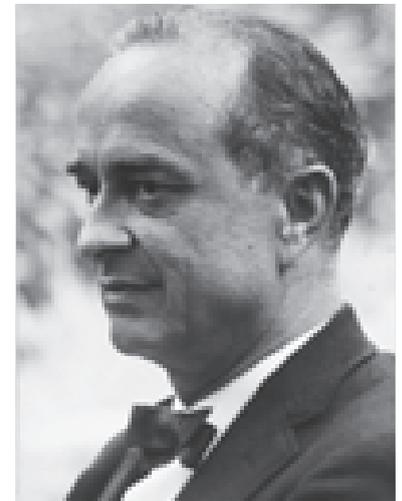
Carl Ludwig Siegel war einer der bedeutendsten Mathematiker der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Er forschte und lehrte 15 Jahre in Frankfurt, von 1922 bis 1937. In dieser Zeit entstanden seine wichtigsten zahlentheoretischen Arbeiten. Danach in Göttingen, ab 1940 in Princeton und ab 1951 wieder in Göttingen, erbrachte Siegel wichtige Beiträge zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Variablen und zur Himmelsmechanik. Außerdem dehnte er seine Methoden erheblich aus, um additive Fragen in algebraischen Zahlkörpern (zum Beispiel das Waring-Problem) zu behandeln.

Die Frankfurter Jahre fanden ein Ende, als Siegel zum 1. Januar 1938 nach Göttingen wechselte. Die nationalsozialistische Politik, die seine jüdischstämmigen Kollegen und Freunde Max Dehn, Paul Epstein, Ernst Hellinger und Otto Szász aus dem Dienst gedrängt hatte, war Siegel zutiefst zuwider.■

Anlässlich der 50-Jahr-Feier der Universität (1964) hielt Siegel einen Vortrag zur Geschichte des Mathematischen Seminars der Universität Frankfurt (<sup>18/</sup> III 462–474). Willy Hartner beschreibt diesen Bericht: »Dem äußeren Anschein nach kühl distanziert, jedoch in Wahrheit innerlich stärkstens engagiert, schildert er [Siegel] seine Frankfurter Jahre, von der Zeit seiner Berufung als 25-Jähriger im Jahr 1922 bis zum trostlosen beschämenden Ende in den 30er Jahren.«<sup>19/</sup> Siegel schloss seine Rede mit den bewegenden Worten:

»Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Zerstörung des Frankfurter Mathematischen Seminars durch die Herrschaft Hitlers für alle davon betroffenen Dozenten die Beendigung der besten und fruchtbarsten Zeit ihres Lebens bedeutet hat. Inzwischen sind drei Jahr-

■ Carl Ludwig Siegel wurde 1922 im Alter von 25 Jahren ordentlicher Professor an der Universität Frankfurt. Anfang 1938 wechselte er an die Universität Göttingen. Wegen seiner Ablehnung der nationalsozialistischen Politik emigrierte er von dort aus 1940 in die vereinigten Staaten.



zehnte vergangen, die Schäden sind zum Teil repariert, soweit sie eben repariert werden konnten, und insbesondere ist die Mathematik in Frankfurt wieder in guten Händen. Wollen wir hoffen, daß sich niemals wiederholen möge, was einst irgeleitete Fanatiker hier rechtlich denkenden Menschen angetan haben!<sup>18/</sup> ■

»...so besuchte ich aus purer Neugier dieses Kolleg«

Carl Ludwig Siegel wurde am 31. Dezember 1896 in Berlin geboren. Zum Wintersemester 1915/16 nahm er das Studium der Astronomie in Berlin auf.

»Als ich im Herbst 1915 an der Berliner Universität immatrikuliert wurde, war gerade ein Krieg in vollem Gange. Obwohl ich die politischen Ereignisse nicht durchschaute, so faßte ich in instinktiver Abneigung gegen das gewalttätige Treiben der Menschen den Vorsatz, mein Studium einer den irdischen Angelegenheiten möglichst fernliegenden Wissenschaft zu widmen, als welche mir damals die Astronomie erschien. Daß ich trotzdem zur Zahlentheorie kam, beruhte auf

folgendem Zufall. Der Vertreter der Astronomie an der Universität hatte angekündigt, er würde sein Kolleg erst 14 Tage nach Semesterbeginn anfangen, was übrigens in der damaligen Zeit weniger als heutzutage üblich war. Zu den Wochenstunden Mittwoch und Sonnabend 9 bis 11 Uhr war aber auch eine Vorlesung von Frobenius über Zahlentheorie angezeigt. Da ich nicht die geringste Ahnung davon hatte, was Zahlentheorie sein könnte, so besuchte ich aus purer Neugier dieses Kolleg, und das entschied über meine wissenschaftliche Richtung ...«

Auf Antrag von Georg Frobenius (1849–1917, in Berlin 1892–1916) erhielt Siegel zum Ende seines ersten Semesters den Eisensteinpreis, der jährlich einem begabten Studenten der Mathematik verliehen wurde. Zur Ausstrahlung von Frobenius schrieb Siegel: »..., daß ich nicht gut erklären kann, wodurch die starke Wirkung der Vorlesungen von Frobenius hervorgerufen wurde. Nach meiner Schilderung der Art seines Auftretens hätte die Wirkung eher abschreckend sein können. Ohne daß es mir klar wurde, beeinflusste

■ Willy Hartner, von 1940 bis 1970 Professor für Geschichte der Naturwissenschaften an der Universität Frankfurt, nahm nach der »Reichskristallnacht« den jüdischen Kollegen Max Dehn und dessen Frau Antonie vorübergehend in seinem Haus in Bad Homburg auf. Wenige Wochen später, im Januar 1939, emigrierten die Dehns.

3 Edmund Landau erkannte den Wert einer zunächst sehr kurz gefassten Arbeit Siegels aus dem dritten Semester. Unter seiner Anleitung arbeitete Siegel seine Gedanken aus und wurde in 1920 in Göttingen promoviert.



4 Ludwig Siegel bei seiner Doktorzeremonie in Göttingen: Er sitzt im Bollerwagen in der Bildmitte. Hintere Reihe: Walfisz (mit Hut), Rogosinski, H. Kneser, Bessel-Hagen (mit Hut), Windau, Krull, Emersleben. In der vorderen Reihe: Nefs, Fräulein Wolff, Siegel, Grandjot, Kapferer, Boskovic. Die Identifizierung der Dargestellten ermöglichte S. J. Patterson, der in Martin Knesers Nachlass eine entsprechende Notiz fand.

mich wahrscheinlich die gesamte schöpferische Persönlichkeit des großen Gelehrten, die eben auch durch die Art seines Vortrags in gewisser Weise zur Geltung kam. Nach bedrückenden Schuljahren unter mittelmäßigen oder sogar böartigen Lehrern war dies für

mich ein neuartiges und befreiendes Erlebnis.«

Dem innerlich abgelehnten Wehrdienst konnte sich Siegel weitgehend entziehen, dank der Unterstützung durch den Leiter einer psychiatrischen Klinik. Nach dem Wechsel zur Mathematik be-

schäftigte sich Siegel, angeregt durch eine Vorlesung von Issai Schur, im dritten Studiensemester mit dem Problem der »schlechten Approximierbarkeit« algebraischer Zahlen durch rationale; Siegel verschärfte einen Satz des norwegischen Mathematikers Axel Thue erheblich [siehe »Approximation algebraischer Zahlen«].

Issai Schur konnte allerdings mit Siegels extrem kurz gefasster Arbeit nichts anfangen. Edmund Landau (1877–1938), der von 1909 bis 1934 in Göttingen wirkte, zeigte sich interessiert und leitete Siegel zu einer ausführlicheren Darstellung an. Die Promotion erfolgte am 9. Juni 1920.

»ein Mathematiker von genialer Schaffenskraft«

Während des Wintersemesters 1920/21 war Siegel Lehrbeauftragter in Hamburg, dann Assistent bei Richard Courant, Göttingen. Die Habilitation erfolgte am 10. Dezember 1921 über die additive Theorie der Zahlkörper; darin entwickelte er eine technisch aufwendige Ausdehnung der »Kreis-Methode« von Godefroy H. Hardy und John E. Littlewood auf total-reelle Zahlkörper. Am 1. August 1922 wurde C. L.

### Diophantische Approximation algebraischer Zahlen

A. THUE zeigte 1908/1909, daß für eine algebraische Zahl  $\alpha$  vom Grade  $s > 1$  (diese ist Nullstelle eines irreduziblen Polynoms aus  $\mathbb{Z}[X]$  vom Grade  $s$ ) die Ungleichung  $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < q^{-\mu}$  für  $\mu > \frac{1}{2} \cdot s$  höchstens endlich viele Lösungen in ganzen, teilerfremden Zahlen  $a, q$  besitzt.

Als Anwendung ergibt sich: Für eine irreduzible, binäre Form  $F(x, y)$  mit ganzen Koeffizienten, vom Grade  $\geq 3$ , hat für jedes ganze  $m \neq 0$  die »Thue-Gleichung«  $F(x, y) = m$  nur endlich viele Lösungen in ganzen  $x, y$ .

CARL LUDWIG SIEGEL verbesserte den zulässigen Exponenten  $\mu$  auf  $\min_{1 \leq t \leq s} \left( t + \frac{s}{t+1} + \varepsilon \right)$ , damit kam  $\mu$  in die Nähe von  $2 \cdot \sqrt{s}$ .

Der Physiker F. J. DYSON investierte 1947 ein ganzes Jahr in dieses Problem und fand, daß jedes  $\mu > \sqrt{2s}$  zulässig ist. KLAUS FRIEDRICH ROTH, 1925 in Breslau geboren, 1937 nach London emigriert, konnte 1955 das bestmögliche Ergebnis: jedes  $\mu > 2$  ist zulässig beweisen. Er erhielt dafür 1958 die Fields-Medaille.

Die Sätze von THUE – SIEGEL – ROTH sind nicht effektiv, d.h. es kann keine Schranke für die größte der [endlich vielen] Lösungen angegeben werden. Explizite Schranken für die Lösungen von diophantischen Gleichungen  $f(x, y) = g(x, y)$  wurden erst durch ALAN BAKERS Ergebnisse (1966 – 1969) über Linearformen in Logarithmen möglich.

Siegel ordentlicher Professor in Frankfurt als Nachfolger von Arthur Schoenflies.

Die Naturwissenschaftliche Fakultät begründete ihren Berufungsvorschlag:

»Wenn die Fakultät in erster Linie einen jungen, soeben habilitierten Mann vorschlägt, ist sie der festen Ueberzeugung, daß seine Persönlichkeit und bisherigen Leistungen einen so ungewöhnlichen Schritt vollauf rechtfertigen. Nach einhelligem Urteil aller Sachverständigen ist Siegel einer der seltenen Mathematiker von genialer Schaffenskraft. Aus relativ kurzer Zeit liegen Arbeiten von ihm vor, die in der allerersten Reihe mathematischer Produktion stehen. Sie behandeln tiefste arithmetische Probleme – es sei nur die Approximierbarkeit algebraischer Zahlen und die additive Zahlentheorie in beliebigen Zahlkörpern hervorgehoben – und zeigen nicht nur eine vollendete Beherrschung der vorhandenen zahlentheoretischen Methoden, sondern größte Erfindungsgabe in der Schaffung neuer Hilfsmittel und Kraft bei der Ueberwindung der gewaltigen Schwierigkeiten jener Probleme.«

Es sollte angemerkt werden, dass Siegels (frei vorgetragene) Vorlesungen für ihre Klarheit berühmt waren. Im Sommer-Semester 1930 war Siegel Gastprofessor in Göttingen, um den emeritierten David Hilbert zu vertreten. In Frankfurt wurde Siegel durch Emmy Noether vertreten, die seit 1922 außerordentliche Professorin in Göttingen war.

### Mutiger Kritiker des Nationalsozialismus

Siegel machte aus seiner Verachtung für die nationalsozialistische Ideologie kein Geheimnis. Er weigerte sich, seine Vorlesungen mit dem »Deutschen Gruß« zu eröffnen oder als Sammler für das »Winterhilfswerk« tätig zu sein. Seine Arbeit in den Transactions of the American Mathematical Society 1936 widmete er Paul Epstein, dessen Lehrtätigkeit 1935 beendet worden war; nach einer Vorladung durch die Gestapo wählte Epstein am 11. August 1939 den Freitod.

Vom 1. Januar 1935 bis zum Ende des Sommersemesters 1935 übernahm Siegel eine Gastprofessur an der University of Princeton

(USA). Auf einem Brief vom 9. Januar 1935, der im Frankfurter Universitätsarchiv aufbewahrt wird, findet sich ein handschriftlicher Entwurf eines Gutachtens über Siegel durch den Rektor Walter Platzhoff.

»Prof. Siegel ist, wie ich allgemein höre, ein bedeutender Mathematiker, z. Zt. in Amerika zu Gastvorlesungen. Auch als Lehrer ist er sehr geschätzt. Nationalsozialistisch ist er sicher nicht, steht sehr gut mit seinen jüdischen Kollegen. Charakterlich kaum zu beurteilen, lebt ganz zurückgezogen, kommt zu keiner Veranstaltung, ist Eigenbrödler und Sonderling.«

Die Vertretung in Frankfurt erfolgte durch den Dozenten Dr. Werner Weber aus Göttingen, der 1933 Anführer des NS-Boykottes gegen seinen Lehrer E. Landau gewesen war. Nach seiner Rückkehr wehrte sich Siegel massiv, aber erfolglos gegen die weitere Beauftragung von Dr. Weber. In einem Brief vom 2. November 1935 an den Herrn Reichs- und Preußischen Minister für Wissenschaft, Erziehung und Volksbildung in Berlin legt Siegel dar, dass die Heranziehung einer auswärtigen Lehrkraft nicht notwendig sei, weil Fräulein Doktor Moufang und Dozent Dr. Wilhelm Magnus einspringen könnten, und er äußert Zweifel an Webers wissenschaftlicher Qualifikation:

»... Dementsprechend hat er, soweit mir bekannt geworden ist, nach einer 1930 unter dem Einfluß von Prof. Emmy Noether, damals in Göttingen, entstandenen Dissertation und zwei dasselbe Gebiet behandelnden Veröffentlichungen keine produktive wissenschaftliche Arbeit mehr geleistet. Er hat nicht das wissenschaftliche Format eines Universitätslehrers ...«

In Siegels Brief wird auch Ernst Hellinger angeführt, seit 1914 Professor für Mathematik in Frankfurt; dieser wurde 1935 wegen seiner jüdischen Abstammung entlassen; nach der Pogromnacht (9./10. November 1938) war er sechs Wochen im KZ Dachau inhaftiert; im Februar 1939 gelang ihm die Emigration in die USA. Ruth Moufang konnte sich zwar 1936 in Frankfurt habilitieren, erhielt aber nicht die Lehrerlaubnis, »da dem Dozenten im Dritten Reich [...] wesentlich erzieherische

und Führeigenschaften voraussetzende Aufgaben zufallen [...], fehlt dem weiblichen Dozenten künftig die Voraussetzung für eine ersprießliche Tätigkeit«.

Die Fakultät sah sich nicht in der Lage, das Gesuch von Prof. Siegel zu befürworten. »Die pädagogische Eignung [von Dr. Weber] wird gerade von den Studenten unserer Universität, darunter dem [NS-] Fachschaftsleiter, gerühmt. Der Vertreter der [NS-]Dozentenschaft hat erklärt, daß für ihn nur Dr. Weber als Vertreter in Frage käme.« Nebenbei: Werner Weber (1906–1975), ab 1940 außerplanmäßiger Professor an der Universität Berlin, wurde 1945 entlassen.



Arthur Schoenflies war erster Ordinarius für Mathematik an der Universität Frankfurt. Carl Ludwig Siegel wurde sein Nachfolger.

Ernst Hellinger, seit 1914 Professor für Mathematik in Frankfurt, wurde nach der Pogromnacht für sechs Wochen im Konzentrationslager Dachau inhaftiert. Im Februar 1939 gelang es ihm durch die Vermittlung seiner in den USA lebenden Schwester, in die Vereinigten Staaten auszuwandern.



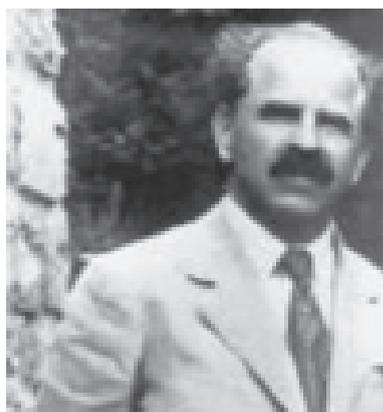
### Provokationen eines hoch angesehenen Wissenschaftlers

Ob Siegels kritische Haltung Folgen hatte? »Wegen des außerordentlichen Ernst[es] der Devisenlage« durfte Siegels Schüler Theodor Schneider (1953 Ordinarius in Erlangen, ab 1959 in Freiburg i. Br.)

7 Theodor Schneider, einem brillanten Schüler Siegels, der das siebte Hilbert'sche Problem löste, wurde 1935 die Habilitation verweigert, da er nicht über die von den Nazis geforderten Führungsqualitäten verfügte.



8 Otto Szász war seit 1921 außerordentlicher Professor an der Universität Frankfurt. 1933 emigrierte er in die Vereinigten Staaten und lebte von einem schmalen Gehalt als Gastprofessor am Massachusetts Institute of Technology (MIT).



nicht zum Internationalen Kongreß der Mathematiker vom 13.–18. Juli 1936 nach Oslo fahren, obwohl dieser in seiner Frankfurter Dissertation 1934 das siebte Hilbert'sche Problem gelöst hatte. Der Beweis gelang ihm nur wenige Wochen nach Aleksander O. Gelfond (und unabhängig von diesem)

## Hilbert'sches Problem

David Hilbert (1862–1943), einer der größten Mathematiker der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts, stellte 1900 in seinem Hauptvortrag beim zweiten Internationalen Kongreß der Mathematiker in Paris 23 Probleme vor, als Herausforderungen für die Mathematik des 20. Jahrhunderts. »Solving one of Hilbert's problems has been the romantic dream of many a mathematician.«<sup>191</sup>

### 7. Hilbert'sches Problem (gelöst durch Gelfond und Schneider)

Sind  $\alpha$  und  $\beta$  algebraische Zahlen, wobei  $\alpha \neq 0, \neq 1$  ist und  $\beta$  irrational ist, so ist die Zahl

$$\alpha^\beta = \exp(\beta \cdot \log \alpha)$$

transzendent, das heißt nicht Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten.

mit einer in wichtigen Teilen abweichenden Methode. Schneider wurde auch 1935 in Frankfurt die Annahme der Habilitationsschrift verweigert, da er nicht über die von den Nazis geforderten Führungsqualitäten verfügte. 1938 folgte er Siegel nach Göttingen.

1937 wurde Siegel nach Paris zu Vorträgen eingeladen. Am 15. Juni 1937 berichtet Siegel an den Rektor Platzhoff.

»Euer Magnifizienz melde ich gehorsamst, dass ich vom 20. Mai bis zum 6. Juni 1937 in Paris gewesen bin, um Vorlesungen an der Sorbonne und am Collège de France zu halten.

Nach längerem Warten bekam ich von der Deutschen Kongress-Zentrale die Mitteilung, dass für meine Reise keine Devisen zur Verfügung stehen. Obwohl ich deshalb in Paris mit nur 10 RM eintraf, kam ich dort nicht in Not, da mir ein französischer Kollege solange Geld lieh, bis ich von der Sorbonne das Honorar für meine Vorlesungen erhalten hatte.

Die von Eurer Magnifizienz angeordneten Besuche bei der deutschen Auslandsvertretung und bei der Pariser Zweigstelle des Deutschen Akademischen Austauschdienstes habe ich gleich nach meiner Ankunft ausgeführt.

Dagegen konnte ich zu meinem größten Bedauern den Pariser Leiter der Auslandsorganisation der N.S.D.A.P. mit dem ich mich nach Möglichkeit in Verbindung zu setzen hatte, nicht erreichen, da die Sprechstunden dieses Herrn gerade in die Zeit meiner Vorlesungen und wissenschaftlichen Besprechungen fielen.

Die Vorlesungen habe ich in französischer Sprache abgehalten. Sie fanden guten Besuch, reges Interesse und lebhaften Beifall. ...

Am 8. Juni sollte noch mir zu Ehren eine Zusammenkunft im Rapprochement Universitaire in der Sorbonne stattfinden. Da meine Geldmittel aufgebraucht waren, musste ich leider schon vorher abreisen.«

Nach Meinung von Theodor Schneider hatte Siegel es provokativ darauf angelegt, aus dem Dienst entfernt zu werden (insbesondere später in Göttingen mit einem Brief an den Polizeipräsidenten, der nur wegen einer Intervention von Helmut Hasse zu keinem bö-

sen Ende führte), doch offenbar konnte er sich als hochangesehener Wissenschaftler einige Provokationen leisten. Viele von Theodor Schneider erzählte Anekdoten über Siegel hat Prof. Dr. Liselotte Kappe (State University in Binghamton), eine Schneider-Schülerin, gesammelt. Eine Veröffentlichung wäre wünschenswert. Zum Frankfurter Schülerkreis von C.L. Siegel gehören auch Wilhelm Maier, Kurt Mahler, Helene Braun. Der Verfasser dieses Artikels ist Schüler von Theodor Schneider.

9 Hel Braun, eine Frankfurter Schülerin Siegels, folgte ihrem Lehrer 1938 nach Göttingen, wo sie sich 1940 habilitierte.



Zum 1. Januar 1938 wechselte Siegel an die Universität Göttingen. Im Frühjahr 1940 emigrierte Siegel in die Vereinigten Staaten von Amerika. Theodor Schneider wusste von Siegels Absicht, zu emigrieren. Siegel hatte ihm vorgeschlagen, mitzukommen, aber Schneider wagte es nicht, alles hinter sich zu lassen – in der Erwartung einer reichlich unsicheren Zukunft. Siegel, 1935 als Gast in Princeton, brauchte wegen seiner Zukunft in den USA nicht besorgt zu sein.

Bis 1945 hatte Siegel ein Forschungsstipendium am Institute for Advanced Study in Princeton, 1945 bis 1951 war er dort in fester Stellung. Als Gastprofessor verbrachte er das Wintersemester 1946/47 in Göttingen. Seit 1951 war Siegel wieder ordentlicher Professor in Göttingen. Die Emeritierung erfolgte zum 1. April 1959.

Viermal hielt Siegel Gastvorlesungen am Tata-Institut in Bombay. 1963 erhielt Siegel den Orden Pour le Mérite (weitere Ordensträger aus der Mathematik waren Felix Klein (1923), David Hilbert (1926) und Friedrich Hirzebruch (1991)), 1964 das Große Verdienst-



▣ Ostfriesisches Bauernhaus, gezeichnet von Siegel. Er malte und zeichnete gerne in seiner Freizeit.

kreuz mit Stern. 1978 wurde er (zusammen mit Israil M. Gelfand) erster Preisträger der renommierten israelischen Wolf Foundation. Siegel erhielt sechs Ehrendoktorate. Er verstarb am 4. April 1981 in Göttingen.

#### Mathematische Arbeiten

Siegel machte tiefgründige Entdeckungen über Automorphe Funktionen («Siegel'sche Modul-funktionen»), über Quadratische Formen und in der Himmelsmechanik; dort arbeitete er beispielsweise zum restringierten Dreikör-

perproblem, zum Problem der »Kleinen Nenner« und setzte sich mit dem Verhalten der Lösungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung auseinander.<sup>131/151</sup>

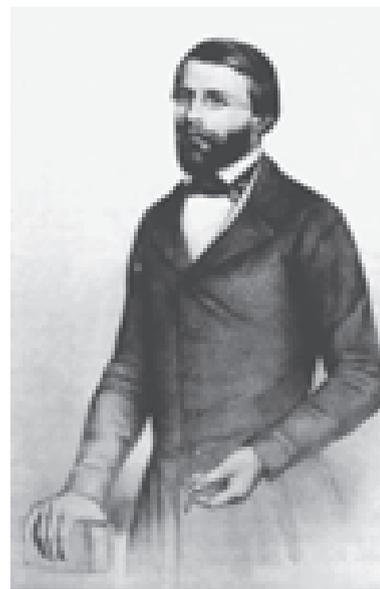
In der Zahlentheorie befasste sich Siegel mit Approximationseigenschaften algebraischer Zahlen, mit der Begründung der additiven Zahlentheorie in Zahlkörpern, mit Transzendenzuntersuchungen bei Bessel- und allgemeinen E-Funktionen und mit ganzzahligen Lösungen diophantischer Gleichungen. In der Primzahltheorie schätzte Siegel den Abstand einer (vielleicht

existierenden) reellen Ausnahme-Nullstelle Dirichletscher-L-Funktionen von 1 nach unten ab und ermöglichte damit den Beweis des »Primzahlsatzes von Page-Siegel-Walfisz«.

In der Arbeit »Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie« wird unter anderem eine semikonvergente Entwicklung der Zeta-Funktion gegeben, die zum Beispiel später wichtig war, um zu zeigen, dass die ersten 1,5 Milliarden Nullstellen der Zetafunktion exakt auf der kritischen Geraden liegen. Die genannte kurze viersei-

#### Einige wichtige Frankfurter Publikationen von C. L. Siegel

1. Additive Theorie der Zahlkörper, II (1923).
2. Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, Abh. Preuss. Akad. Wiss. 1929.
3. Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik (1932).
4. Über Gitterpunkte in convexen Körpern und ein damit zusammenhängendes Extremalproblem, Acta Mathematica 65 (1935).
5. Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, I–III, Annals of Mathematics 36 (1935), 37 (1936), 38 (1937).
6. Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper, Acta Arithmetica 1 (1936).
7. Analytische Theorie der quadratischen Formen, Comptes Rendus du Congrès international des Mathématiciens (Oslo) 1937.



▣ Während seiner Frankfurter Zeit beschäftigte sich Siegel auch mit den Publikationen Bernhard Riemanns (1826–1866), insbesondere mit dessen Beiträgen zur analytischen Zahlentheorie.

tige Arbeit über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper ist wichtig für Fragen nach der Verteilung der Primzahlen.

Es ist hier nicht möglich, die vielen weiteren zahlentheoretischen Arbeiten Siegels näher zu beschreiben; zum Beispiel wären die technischen Anforderungen für eine Erläuterung der für Jahrzehnte wegweisenden Arbeiten zu quadratischen Formen zu anspruchsvoll.

Allerdings soll versucht werden, die äußerst wichtige Arbeit »An-

wendungen diophantischer Approximationen« aus dem Jahre 1929 kurz zu beschreiben. Im ersten Teil, »Max Dehn gewidmet«, entwickelt Siegel eine allgemeine Methode, um zu zeigen, dass Werte der Zylinderfunktion  $J_0(x)$  und ihrer Ableitungen, allgemeiner die Werte Siegel'scher E-Funktionen (zu diesen gehören die Exponentialfunktion und Bessel-Funktionen) an algebraischen Stellen  $x \neq 0$  transzendent (das heißt nicht algebraisch) sind.

Im zweiten Teil, »Arthur Schoenflies zum Gedächtnis«, wird gezeigt, dass für jedes Polynom  $f(x,y)$  mit Koeffizienten aus einem festen algebraischen Zahlkörper (zum Beispiel mit ganzen Zahlen als Koeffizienten) die Gleichung  $f(x,y)=0$  nur endlich viele ganze Lösungen  $x,y$  aus dem Koeffizientenkörper besitzt, wenn das Geschlecht  $g$  der Kurve  $f(x,y)=0$  größer als Null ist.

Erst mehr als 50 Jahre später konnte Gerd Faltings einen entsprechenden Satz mit rationalen Lösungen zeigen (1983, er erhielt dafür 1986 die Fields-Medaille). Faltings' Ergebnis impliziert, dass die Fermat-Gleichung  $x^n + y^n = z^n$  höchstens endlich viele ganze Lösungen  $\neq 0$  besitzt, wenn der Exponent  $n$  größer als zwei ist. Der endgültige Beweis der Fermat'schen Vermutung (die Fermat-Gleichung hat für  $n > 2$  keine ganzzahligen Lösungen  $\neq 0$ ) gelang dann, um 1995, erst Andrew Wiles.

Wir schließen mit einer ins Deutsche übertragenen Würdigung Siegels durch K. Chandrasekharan (im Vorwort zu Siegels Gesammelten Werken): »In seiner Kombination von arithmetischen, analytischen und geometrischen Methoden und seinem untrüglichen Gefühl für begriffliches und strukturelles Denken – im Gegensatz zum rein technischen – stellt Siegel einen typischen Vertreter moderner mathematischer Denkweise dar. Zugleich klassisch und modern, hat sein Werk die Mathematik unserer Zeit tiefgründig beeinflusst.«

## Classenzahl quadratischer Zahlkörper

Bezeichne  $h(d)$  die Classenzahl des imaginär-quadratischen Zahlkörpers mit der Diskriminante  $d$ . SIEGEL bewies

$$\log h(d) \sim \log \sqrt{|d|}.$$

Wegen  $\pi|d|^{-\frac{1}{2}}h(d) = L_d(1)$  mit der  $L$ -Funktion

$$L_d(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{n}\right) \cdot \frac{1}{n^s}$$

beweist SIEGEL eine untere Abschätzung für  $L_D(1)$ , nämlich  $L_D(1) > |D|^{-\epsilon}$  für großes  $D$ . Dies impliziert, daß  $L$ -Reihen mit reellen Charakteren in

$$1 - |D|^{-\epsilon} < \sigma < 1, \quad D \text{ groß}$$

keine reellen Nullstellen haben können.

Dies führt zum **Primzahlsatz von Page-Siegel-Walfisz**:

Ist  $A$  gegeben, so gilt gleichmäßig für alle  $q \leq \log^A x$  und alle zu  $q$  teilerfremden  $a$  die asymptotische Formel

$$\pi(x; q, a) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \text{li}(x) + \mathcal{O}\left(x \cdot \exp(-c\sqrt{\log x})\right).$$

Eine gleichmäßige Abschätzung des Restgliedes des Primzahlsatzes ist [fast] unumgänglich, wenn man Fragen der additiven Zahlentheorie mit Primzahlen behandeln will, z.B. für I. M. VINOGRADOVS Dreiprimzahlsatz (1937): *Jede hinreichend große ungerade Zahl ist als Summe von drei Primzahlen darstellbar.*

### Literatur

Die zitierten Briefe stammen aus dem Archiv der Universität Frankfurt.

<sup>11/</sup> Hartner, Willy, Aufbau und Geschick der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Johann Wolfgang Goethe-Universität vor, während und nach dem 2. Weltkrieg. Frankfurt 1981.

<sup>12/</sup> Kaemmel, Thomas, Arthur Schoenflies, Mathematiker und Kristallforscher, Projekte-Verlag 188, Halle 2006.

<sup>13/</sup> Klingen, Helmut, Das Werk Carl Ludwig Siegels in der Funktionentheorie, Jahresbericht DMV, 85, 158–173, 1983.

<sup>14/</sup> Koecher, Max, Herausgeber, Hel Braun, Eine Frau und die Mathematik, 1933–1940, Springer-Verlag 1990.

<sup>15/</sup> Rüssmann, Helmut, Das Werk Siegels in der Himmelsmechanik, Jahresbericht DMV, 85, 174–200, 1983.

<sup>16/</sup> Schneider, Theodor, Das Werk C. L. Siegels in der Zahlentheorie, Jahresbericht DMV, 85, 147/157, 1983.

<sup>17/</sup> Schneider, Theodor, Nachruf auf Carl Ludwig Siegel, Jahrbuch der Akademie d. Wiss. in Göttingen, 1982, 75–84.

<sup>18/</sup> Siegel, Carl Ludwig, Gesammelte Abhandlungen, herausgegeben von K. Chandrasekharan & Hans Maass, 4 Bände, Springer-Verlag 1966, 1979.

<sup>19/</sup> Yandell, Benjamin H., The Honors Class, Hilbert's Problems and Their Solvers, A.K. Peters, Natick (MA), 2002, 486 pp.

### Der Autor

**Prof. Dr. Wolfgang Schwarz**, 74, promovierte 1959 an der Universität Erlangen als Schüler von Prof. Dr. Theodor Schneider. 1964 habilitierte er sich in Freiburg i. Br., 1969 nahm er einen Ruf an die Universität Frankfurt an, wo er bis zu seiner Emeritierung im Jahr 2002 forschte und lehrte. Sein Fachgebiet ist die Elementare und vor allem Analytische Zahlentheorie. Ebenso gehört die Geschichte der Mathematik zu seinen Interessengebieten. 1986 und 1987 war Schwarz Vorsitzender der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV); 1993–1994 Sprecher der Konferenz der Mathematischen Fachbereiche. Er war Mit-Organisator einer Reihe von Tagungen über Elementare und Analytische Zahlentheorie im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach; 2004 organisierte er eine Tagung zum gleichen Fachgebiet in Mainz. Wolfgang Schwarz ist Autor mehrerer Fachbücher über Primzahlen, Zahlentheorie, Siebmethoden und Arithmetical Functions (gemeinsam mit J. Spilker).

[schwarz@math.uni-frankfurt.de](mailto:schwarz@math.uni-frankfurt.de)